Решения заданий второго (дополнительного отборочного) этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2021-2022 гг.

11 класс

11.1.. Найти множество всех точек М координатной плоскости, для которых существует отрезок ненулевой длины, концы которого лежат на графике функции $y=\frac{1}{x}$, а середина совпадает с М.

Ответ. Все точки первого координатного угла, лежащие выше графика функции $y=\frac{1}{x}$, все точки третьего координатного угла, лежащие ниже графика функции $y=\frac{1}{x}$, все точки второго и четвёртого координатных углов и начало координат. Все точки координатных осей, кроме (0,0), в ответ не входят.

Решение. Точка $M(a,b)$ удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда найдутся x и y такие, что точки (x,y) и $(2a-x,2b-y)$ лежат на графике функции $y=\frac{1}{x}$. Последнее равносильно одновременному выполнению равенств $y=\frac{1}{x}$ и $2b-y=\frac{1}{2a-x}$. Выражая из первого y через x, подставляем во второе, приводим всё к квадратному уравнению $bx^2-2abx+a=0$. Оно разрешимо при $D/4=ab(ab-1)\geq 0$, что имеет место при $ab\leq 0$ или $ab\geq 1$.

Если $ab=0$, то либо $a=b=0$, что нам очевидно подходит, либо $a=0, b\neq 0$ и из уравнения $x=0$, но на ноль делить нельзя и этот случай не подходит, либо $a\neq 0, b=0$, тогда из уравнения снова $a=0$ - противоречие. Таким образом, случай $ab=0$ даёт нам единственную точку М – начало координат.

Если $ab=1$, то из уравнения следует $x=a, y=b$, в этом случае отрезок вырождается в точку М. Следовательно, случай $ab=1$ нам не подходит.

Случай $ab\leq 0$ даёт нам точки второго и четвёртого координатных углов, а случай $ab\geq 1$ - все точки первого координатного угла, лежащие выше графика функции $y=\frac{1}{x}$ и все точки третьего координатного угла, лежащие ниже графика функции $y=\frac{1}{x}$.

Критерии проверки. (●) Упущен случай, когда М – начало координат: минус 1 балл. (●) Найдены только точки первого координатного угла, лежащие выше графика функции $y=\frac{1}{x}$ и все точки третьего координатного угла, лежащие ниже графика функции $y=\frac{1}{x}$: 3 балла. (●) При этом не исключены точки М на гиперболе: минус 1 балл. (●) Найдены только точки второго и четвёртого координатных углов: 3 балла. (●) При этом не исключены точки М на координатных осях: минус 1 балл. (●) Ответ задачи дан в форме –все точки $M(a,b)$ такие, что $ab<0$., либо $ab>1$, либо $a=b=0$, без объяснения геометрической структуры этого множества :6 баллов

11.2. В описанном четырёхугольнике ABCD величины углов CDA, DAB и ABC равны 90°, 120° и 120° соответственно, а длина стороны BC равна 1 см. Найти длину стороны AB.

Ответ. $AB = 2-\sqrt{3}$

Решение. Обозначим длину стороны AB за x. Продолжим стороны DA и CB до их пересечения в точке E. Треугольник EAB равнобедренный с углами по 60 градусов при основании AB, то есть равносторонний. Треугольник ECD – прямоугольный с углом 30° при вершине C, следовательно, $ED=\frac{1}{2}EC=\frac{x+1}{2}, DC=\frac{\sqrt{3}}{2}EC=\frac{\sqrt{3}(x+1)}{2}$. Отсюда $AD=ED-AE=ED-x=\frac{1-x}{2}$. Четырёхугольник ABCD описанный, следовательно $AD+BC=AB+CD \Leftrightarrow \frac{3-x}{2}=x+\frac{\sqrt{3}(x+1)}{2} \Leftrightarrow 3-3x=\sqrt{3}(x+1)$, откуда $x=2-\sqrt{3}$.

Критерии проверки. (●) Длины стороны CD и отрезка DE выражены через длину AB: 2 балла. (●) Длины стороны AD выражена через длину AB: 1 балл. . (●) Записано условие описанности четырёхугольника ABCD: 1 балл.

11.3. Каждая клетка квадратной доски размера n на n окрашена в синий или красный цвет. Строка или столбец называются синеватой, если в ней синих клеток больше, чем красных. Соответственно, строка или столбец называются красноватой, если в ней красных клеток больше, чем синих. Какое максимальное значение может принимать сумма числа красноватых строк и числа синеватых столбцов при некоторой раскраске доски в зависимости от n?

Ответ. Максимальное значение суммы числа красноватых строк и числа синеватых столбцов равно: а) если n - нечётно, то $2n-2$, б) если n - чётно и $n\geq 8$, то $2n-4$, в) для $n-2{,}4{,}8$ соответственно 2.5,9.

Решение. Рассмотрим произвольную раскраску доски в два цвета, обозначим за x количество красноватых строк и за y - количество синеватых столбцов в ней.

1. Пусть сначала n - нечётно. Оценка. Каждая красноватая строка содержит не меньше $\frac{n+1}{2}$ красных клеток, а каждый синеватый столбец – не меньше $\frac{n+1}{2}$ синих клеток, следовательно, $\frac{n+1}{2}\cdot x+\frac{n+1}{2}\cdot y\leq n^2$, откуда $x+y\leq\frac{2n^2}{n+1}=2n-2+\frac{2}{n+1}$. При $n>1$ отсюда следует $x+y\leq 2n-2$. Пример. Раскрасим левый нижний квадрат размера $n-1$ на $n-1$ клеток доски в синий и красный цвета в шахматном порядке, верхнюю строку в синий цвет, а правый столбец – в красный цвет. Тогда $n-1$ нижних строк будут красноватыми, а $n-1$ левый столбец – синеватыми.

2. Пусть теперь n нечётно. Оценка. Каждая красноватая строка содержит не меньше $\frac{n}{2}+1$ красных клеток, а каждый синеватый столбец – не меньше $\frac{n}{2}+1$ синих клеток, следовательно, $(\frac{n}{2}+1)x+(\frac{n}{2}+1)y \le n^2$, откуда $x+y \le \frac{2n^2}{n+2} = 2n-4+\frac{8}{n+2}$. При $n \ge 8$ отсюда следует $x+y \le 2n-4$. Пример. Раскрасим левый нижний квадрат размера $n-2$ на $n-2$ клеток доски в синий и красный цвета в шахматном порядке, две верхних строки в синий цвет, а два правых столбца – в красный цвет. Тогда $n-2$ нижних строки будут красноватыми, а $n-2$ левых столбца – синеватыми.

3. Оставшиеся случаи малых чётных n. При $n=2$ по формуле $x+y \le 2$, значение 2=2+0 достигается при окраске всех клеток доски в красный цвет (или наоборот в синий цвет). При $n=4$ по формуле $x+y \le 5$, значение 5=4+1 достигается при окраске трёх левых столбцов в красный цвет и правого – в синий. Наконец, при $n=6$ по формуле $x+y \le 9$. Для достижения оценки 9=6+3 окрасим в красный цвет все клетки трёх левых столбцов, а также первую и вторую снизу клетки четвёртого, третью и четвёртую снизу клетки пятого, пятую и шестую снизу клетки шестого столбцов. Остальные 12 клеток красим в синий.

Критерии проверки. (●) Получение оценки для всех нечётных n: 1 балл. (●) Получение оценки для всех чётных $n \ge 8$: 1 балл. Построение примера раскраски для всех нечётных n: 1 балл. Построение примера раскраски для всех чётных $n \ge 8$: 1 балл. Получение оценок для всех $n = 2,4,6$: 1 балл. Построение примеров раскраски для $n = 2,4$: 1 балл. Построение примера раскраски для $n=6$: 1 балл.

11.4.. Доказать, что, если для некоторых натуральных чисел x, y число $x \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ целое, то оно делится на 60.

Доказательство. Число $x \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ является целым тогда и только тогда, когда целым является число $\sqrt{x^2+y^2}$. Делимость на 60 равносильна одновременной делимости на 4, 3 и 5. Поэтому рассмотрим остатки от деления чисел x, y на эти числа, и тому, при каком сочетании этих остатков целым будет число $\sqrt{x^2+y^2}$. Более того, в доказательстве делимости на 4 нам понадобятся даже остатки от деления на 8.

1) Остатки от деления чисел x, y на 5 равны 0.1,2,3,4, а от деления их квадратов на 5: 0,1.4,4,1. Если x или y делятся на 5, то и произведение $x \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ тоже делится на 5. В противном случае остатки от деления на 5 чисел x^2, y^2 равны 1 или 4, а возможный остаток x^2+y^2 равен 2=1+1,3=4+4 и 0=1+4. В последнем случае x^2+y^2 делится на 5 и является полным квадратом, то есть делится на 25, и $\sqrt{x^2+y^2}$ делится на 5. В двух других

случаях остатки от деления x^2+y^2 на 5 равны 2 или 3, что не равно 0, 1 или 4, поэтому x^2+y^2 не является квадратом и целый корень квадратный из него не извлекается, то есть эти случаи не подпадают под условия задачи.

2) Остатки от деления чисел x, y на 3 равны 0,1,2, а от деления их квадратов на 3: 0,1.1. Если x или y делятся на 3, то и произведение $x \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ тоже делится на 3. В противном случае остатки от деления на 3 чисел x^2, y^2 равны 1, а остаток x^2+y^2 равен 2=1+1. В последнем случае остаток от деления x^2+y^2 на 3 равен 2, что не равно 0 или 1, поэтому x^2+y^2 не является квадратом и целый корень квадратный из него не извлекается, то есть этот случай не подпадает под условия задачи.

3) Остатки от деления чисел x, y на 4 равны 0,1,2,3, а от деления их квадратов на 4: 0,1,0,1. Если x или y делятся на 4, то и произведение $x \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ тоже делится на 4. То же самое в случае, когда оба остатка от деления чисел x, y на 4 равны 2. В оставшихся случаях остаток от деления на 4 числа x^2+y^2 равен 2=1+1, или 1=0+1. В первом случае остаток от деления x^2+y^2 на 4 равен 2, что не равно 0 или 1, поэтому x^2+y^2 не является квадратом и целый корень квадратный из него не извлекается, то есть этот случай не подпадает под условия задачи. Во втором случае $x=4k+2, y=4n+1$ или $x=4k+1, y=4n+2$. Тогда $x^2+y^2=(4k+2)^2+(4n+1)^2=16(k^2+k)+8(2n^2+n)+5=8m+5$, то есть в обоих случаях остаток от деления x^2+y^2 на 8 равен 5. Однако легко заметить, что остаток от деления квадрата числа на 8 может равняться 0,1,4, поэтому $\sqrt{x^2+y^2}$ не может быть целым и данный случай не подпадает под условия задачи.

Таким образом, во всех случаях, если число $x \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ является целым, то оно делится на 3,4 и 5, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) .Доказательство делимости $x \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ на 5 или 3: по 2 балла за каждый случай. (●) . Доказательство делимости $x \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ на 4: 3 балла. (●) .Нет проверки целочисленности квадратного корня: минус1 балл. (●) .Нет полного доказательства делимости на 4: минус1 балл. (●) Нет хотя бы одного варианта делимости на 3 или на 5: минус 1 балл. (●) Нет обоих вариантов делимости на 3 и на 5: минус 3балла.

11.5. Действительные числа $x<y<z$ таковы, что $x+y+z=6$ и $xy+yz+xz=9$. Докажите, что тогда $0<x<1<y<3<z<4$.

Доказательство 1. Рассмотрим кубическое уравнение $(t-x)(t-y)(t-z)=0$ относительно переменной t, корнями которого являются действительные числа $x<y<z$. Раскроем скобки в левой части уравнения: $(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+xz+yz)t-xyz=0$, заменим скобки в соответствии с условием, получим $t^3-6t^2+9t+p=0$, где $p=-xyz$. Исследуем функцию $f(t)=t^3-6t^2+9t+p$ из левой части уравнения. Находим

производную $f'(t)=3t^2-12t+9$, её корнями являются $t_1=1$ и $t_2=3$. На интервалах $(-\infty,1)$ и $(3,+\infty)$ она положительна, и на них функция возрастает, на интервале $(1,3)$ она отрицательна и функция убывает. Следовательно, $t_1=1$- точка локального максимума функции, а $t_2=3$ - точка локального минимума. Уравнение имеет три корня только при выполнении следующих условий: $f(1)=f(t_1)=p+4>0, f(3)=f(t_2)=p<0$. При этом $f(0)=p<0, f(4)=p+4>0$, следовательно, знаки чисел $f(0), f(1), f(3), f(4)$ чередуются, начиная с минуса. Поэтому первый корень уравнения x принадлежит отрезку $(-0,1)$, второй корень y принадлежит отрезку $(1,3)$, а третий корень z - отрезку $(3,4)$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Найдены точки локального минимума и максимума: 1 балл. (●) Исследовано поведение функции на интервалах: 1 балл. (●) Сформулированы условия существования трёх различных корней: 2 балла. (●) Определение границ корней: 3 балла.

Доказательство 2. 1. Ограничим все переменные сразу. Рассмотрим равенства $y+z=6-x$ и $yz=9-x(y+z)=9-x(6-x)=x^2-6x+9=(x-3)^2$. По теореме Виета y и z являются действительными корнями квадратного уравнения $t^2+(x-6)t+(x-3)^2=0$ (*) относительно переменной t с параметром x. Рассмотрим квадратичную функцию $f(t)=t^2+(x-6)t+(x-3)^2$, своё минимальное значение она принимает при $t_0=\dfrac{6-x}{2}$. Уравнение $f(t)=0$ имеет два различных действительных корня $y<z$, поэтому значение $f(t_0)=\dfrac{3x(x-4)}{4}$ должно быть отрицательно, значит $x\in(0,4)$. Рассуждение данного пункта, проведённое относительно x можно повторить относительно остальных переменных, поскольку оно не использует условия $x<y<z$. Следовательно, мы доказали, что $0<x,y,z<4$.

2. Ограничим значение переменной x. Меньший корень y уравнения (*) расположен в интервале $(x,t_0=\dfrac{6-x}{2})$, поэтому $y<\dfrac{6-x}{2}<3$. С другой стороны, $x<y<\dfrac{6-x}{2}$, откуда $x<2$. Кроме того, $f(x)=3(x-1)(x-3)>0$, откуда, с учётом уже доказанных неравенств $0<x<2$, получаем $0<x<1$. При этом абсцисса вершины параболы $t_0=\dfrac{6-x}{2}\in(\dfrac{5}{2},3)$ и $f(t)$ при любом $0<x<1$ убывает на интервале $(x,\dfrac{5}{2})$ и возрастает на интервале $(3,4)$.

3. Ограничим значение переменной y. Заметим, что при всех $0<x<1$ выполняется неравенство $f(1)=(x-1)(x-4)>0$, поэтому корень y лежит в интервале $(1,t_0)$. В частности, $y>1$. С другой стороны $y<t_0=\dfrac{6-x}{2}<3$ при любом $0<x<1$.

4. Ограничим значение переменной z. Выражение $f(3)=x(x-3)<0$ - отрицательно при всех $0<x<1$, поэтому корень z лежит в интервале $(3,4)$.

Критерии проверки. (●) Доказательство неравенства $0<x,y,z<4$: 2 балла. (●) Доказательство неравенства $x<1$: 2 балла. (●) Доказательство неравенства $1<y<3$: 2 балла. (●) Доказательство неравенства $z>3$: 1 балл.